Correction TD - θ4

Exercices à maîtriser

Ex. n°1 • Transformations usuelles ★☆☆ 8576

1) On a immédiatement :

$$dV = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{W = 0}$$

Le premier principe et la loi de Joule assurent donc que :

$$\Delta U = \boxed{Q = C_V\ \Delta T}$$

Le formulaire avec $S(T,V)$ donne :

$$\boxed{\Delta S = C_V\ \ln\left(\frac{T_1}{T_0}\right) = -C_V\ \ln(x)}$$

Par définition de l'entropie échangée :

$$\boxed{S_e = \frac{Q}{T_1} = C_V\,(1-x)}$$

Le second principe donne :

$$\boxed{S_c = \Delta S - S_e = C_V\Big[x - 1 - \ln(x)\Big] \geq 0}$$

2) Le premier principe (version enthalpique) et la loi de Joule assurent donc que :

$$\Delta H = \boxed{Q = C_P\ \Delta T}$$

Le premier principe donne donc :

$$\Delta U = C_V\ \Delta T = W + Q \quad \Rightarrow \quad \boxed{W = (C_V - C_P)\,\Delta T = -nR\ \Delta T}$$

Le formulaire avec $S(P,T)$ donne :

$$\boxed{\Delta S = C_P\ \ln\left(\frac{T_1}{T_0}\right) = -C_P\ \ln(x)}$$

Par définition de l'entropie échangée :

$$\boxed{S_e = \frac{Q}{T_1} = C_P\,(1-x)}$$

Le second principe donne :

$$\boxed{S_c = \Delta S - S_e = C_P\Big[x - 1 - \ln(x)\Big] \geq 0}$$

3) Le premier principe et la loi de Joule assurent que :

$$\Delta U = C_V\ \Delta T = 0 = W + Q$$

Or, le travail des forces de pression vaut :

$$W = -\int_{V_0}^{V_1} P\ dV = -nRT_1 \int_{V_0}^{V_1} \frac{dV}{V}$$

Ainsi,

$$\boxed{W = -Q = -nRT_1\ \ln\left(\frac{V_1}{V_0}\right)}$$

Le formulaire avec $S(T,V)$ donne :

$$\boxed{\Delta S = nR\ \ln\left(\frac{V_1}{V_0}\right)}$$

Par définition de l'entropie échangée :

$$\boxed{S_e = \frac{Q}{T_1} = nR\ \ln\left(\frac{V_1}{V_0}\right)}$$

Le second principe donne :

$$\boxed{S_c = \Delta S - S_e = 0}$$

4) Le caractère adiabatique assure que :

$$\boxed{Q = 0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{S_e = 0}$$

Le premier principe et la loi de Joule assurent donc que :

$$\Delta U = \boxed{W = C_V\ \Delta T}$$

Le caractère réversible assure que :

$$\boxed{S_c = 0}$$

Le second principe donne :

$$\boxed{\Delta S = S_e + S_c = 0}$$

Ex. n°2 • Compressions d'un gaz parfait ★☆☆ 2412

1) Par définition de l'entropie échangée :

$$\boxed{S_{e1} = \frac{Q_1}{T_0} = -nR\ x} \qquad \boxed{S_{e2} = \frac{Q_2}{T_0} = -nR\ \ln(1+x)}$$

On utilise le formulaire pour déterminer la variation d'entropie. C'est une fonction d'état, elle ne dépend pas de la nature de la transformation.

$$\Delta S = C_V \left[\ln\left(\frac{P_f}{P_0}\right) + \gamma\ \ln\left(\frac{V_f}{V_0}\right)\right] = \boxed{-nR\ \ln(1+x)}$$

On utilise le second principe pour déterminer l'entropie créée.

$$\boxed{S_{c1} = nR\Big(x - \ln(1+x)\Big) > 0} \qquad \boxed{S_{c2} = 0}$$

La transformation brutale est irréversible (pas d'équilibre thermique lors de la transformation). Elle devient réversible si $x \to 0$, ie. s'il n'y a pas de transformation...

La transformation lente est réversible toujours en équilibre thermodynamique avec l'extérieur.

Ex. n°3 • Détente de Joule-Gay-Lussac ★☆☆ 6362

1) Par définition de l'entropie échangée :

$$\boxed{S_e = \frac{Q}{T_{ext}} = 0}$$

On utilise la formulaire pour déterminer la variation d'entropie.

$$\Delta S = C_V \left[\ln\left(\frac{P_f}{P_0}\right) + \gamma\ \ln\left(\frac{V_f}{V_0}\right)\right] = \boxed{nR\ \ln(2)}$$

D'après de deuxième principe :

$$\boxed{S_c = \Delta S - S_e = nR\ \ln(2)}$$

Ex. n°4 • Mélange de deux gaz parfaits ★☆☆ 9349

Système : $\{$GP 1 + GP 2$\}$. C'est un système fermé.

L'enceinte est calorifugée :

$$\boxed{S_e = \frac{Q}{T_{ext}} = 0}$$

On utilise l'extensivité de l'entropie :

$$\Delta S_{\text{syst}} = \Delta S_1 + \Delta S_2$$

Or, pour $i = 1, 2$, on a :

$$\Delta S_i = C_V \left[\ln\left(\frac{P_{i,f}}{P_0}\right) + \gamma\ \ln\left(\frac{V_f}{V_0}\right)\right] = nR\ \ln(2)$$

Ainsi,

$$\boxed{\Delta S_{\text{syst}} = S_c = 2nR\ \ln(2) > 0}$$

Lorsque l'on retire la paroi, chaque gaz se réparti dans les deux compartiments. Cette transformation est donc réversible : c'est l'entropie de mélange.

Ex. n°5 • Entropie créée par une résistance ★★☆ 3408

1) La température du système est maintenue constante ($T_i = T_f = T_0$). D'après le formulaire :

$$\boxed{\Delta S_{syst} = \Delta S_R + \Delta S_{eau} = C_R\ \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right) + mc_{eau}\ \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right) = 0}$$

On applique le premier principe (version enthalpique, car transformation au contact de l'atmosphère donc monobare) :

$$\Delta H_{syst} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Loi de Joule}}}{=} 0 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{PP.}}}{=} Q + RI^2\tau \quad \Rightarrow \quad Q = -RI^2\tau$$

On en déduit l'entropie échangée :

$$\boxed{S_e = \frac{Q}{T_0} = -\frac{RI^2\tau}{T_0} = -273\ \mathrm{J\cdot K^{-1}}}$$

On applique le second principe pour en déduire l'entropie créée :

$$\boxed{S_c = \Delta S - S_e = \frac{RI^2\tau}{T_0} = 273\ \mathrm{J\cdot K^{-1}}}$$

2) L'entropie créée état toujours une grandeur positive, R est également toujours positive (car I^2 et T le sont toujours également).

3) Cette fois, $Q = 0$ donc $S_e = 0$. Le premier principe donne :

$$\Delta H_{syst} = \Delta H_R + \Delta H_{eau} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Loi de Joule}}}{=} C\ \Delta T + mc_{eau}\ \Delta T \underset{\substack{\uparrow \\ \text{PP.}}}{=} RI^2\tau$$

On en déduit la température finale :

$$T_f = T_0 + \frac{RI^2\tau}{C + mc_{eau}} = 208\ ^\circ\mathrm{C}$$

Puisque l'énoncé de mentionne pas de changement d'état, supposons que l'eau reste liquide. Qui sait, peut être que l'expérience se fait à très haute pression...

Le second principe et le formulaire donnent :

$$S_c = \Delta S_{syst} = \Delta S_R + \Delta S_{eau} = C_R\ \ln\left(\frac{T_f}{T_0}\right) + mc_{eau}\ \ln\left(\frac{T_f}{T_0}\right)$$

Ainsi,

$$\boxed{S_c = \Delta S_{syst} = (C_R + mc_{eau})\ln\left(1 + \frac{RI^2\tau}{T_0\,(C + mc_{eau})}\right) = 211\ \mathrm{J\cdot K^{-1}}}$$

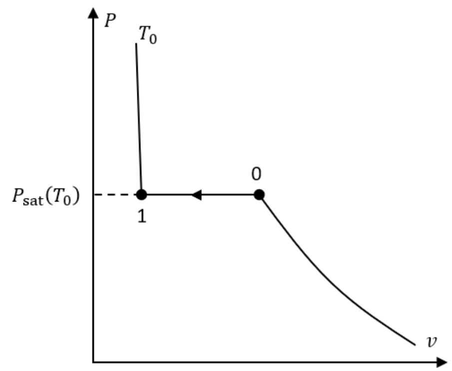
Pour aller plus loin

Ex. n°6 • Vaporisation d'une masse d'eau ★☆☆ 4110

1) On tire lentement, il s'agit donc d'une transformation isobare et isotherme. En considérant la vapeur sèche obtenue comme un gaz parfait :

$$V_1 = \frac{mRT_0}{MP_0} = 1{,}7\ \mathrm{L}$$

2) L'état initial est sur l'isotherme à T_0 et sur la courbe d'ébullition. La transformation suit l'isotherme horizontale (zone équilibre liquide-vapeur) jusqu'à l'autre extrémité, sur la courbe de rosée.



3) La transformation est isobare, donc on peut écrire le premier principe sous laforme d'un bilan enthalpique :

$$\boxed{\Delta H = Q = m\ell_{\mathrm{vap}} = 2{,}25\ \mathrm{kJ}}$$

4) Variation de l'entropie de l'eau vaut :

$$\boxed{\Delta S = \frac{\Delta H}{T_0} = 6{,}0\ \mathrm{J\cdot K^{-1}}}$$

Entropie échangée vaut :

$$\boxed{S_e = \frac{Q}{T_0} = 6{,}0\ \mathrm{J\cdot K^{-1}}}$$

Le deuxième principe donne donc $\boxed{S_c = 0}$. La transformation étudiée ici est donc réversible

Ex. n°7 • Évolutions adiabatiques ★⯪☆ 4654

1) État initial : P_0, V_0, T_0. On en déduit : $n = \dfrac{P_0V_0}{RT_0} = 20$ mmol.

La transformation est adiabatique réversible. La loi de Laplace donne :

$$PV^\gamma = cte \quad\Rightarrow\quad \boxed{V_1 = V_0\left(\frac{P_0}{P_1}\right)^{1/\gamma} = 0{,}61\ \mathrm{L}} \quad\Rightarrow\quad \boxed{T_1 = \frac{P_1V_1}{nR} = 363\ \mathrm{K}}$$

2) On a une transformation adiabatique ($S_e = 0$) et réversible ($S_c = 0$).

3) La transformation est adiabatique et monobare (à P_{ext}).

4) On atteint la pression $P_2 = P_{ext}$.

Travail : $W = -P_2\,(V_2 - V_0)$

Énergie interne :

$$\Delta U = \frac{nR}{\gamma-1}\,(T_2 - T_0) = \frac{P_2}{\gamma-1}\left(V_2 - \frac{P_0 V_0}{P_2}\right)$$

L'enceinte étant calorifugée, $Q = 0$. Le premier principe donne donc :

$$\begin{aligned}\Delta U = W \;&\Rightarrow\; \frac{P_2}{\gamma-1}\left(V_2 - \frac{P_0V_0}{P_2}\right) = -P_2\,(V_2 - V_0)\\ &\Rightarrow\; V_2\left(\frac{1}{\gamma-1}+1\right) = V_0\left(1+\frac{P_0/P_2}{\gamma-1}\right)\\ &\Rightarrow\; \boxed{V_2 = V_0\,\frac{\gamma-1+P_0/P_2}{\gamma} = 0{,}64\ \mathrm{L}}\end{aligned}$$

Équation d'état des gaz parfaits :

$$\boxed{T_2 = \frac{P_2V_2}{nR} = 383\ \mathrm{K}}$$

5) L'enceinte est calorifugée, donc $S_e = 0$. Le deuxième principe (+ le formulaire) donne :

$$\boxed{\Delta S = S_c = \frac{nR}{\gamma-1}\left[\ln\left(\frac{P_2}{P_0}\right) + \gamma\,\ln\left(\frac{V_2}{V_0}\right)\right] = 31\ \mathrm{mJ\cdot K^{-1}}}$$

Le transformation est irréversible.

Ex. n°8 • Contact thermique entre deux solides ★⯪☆ 3882

1) On applique le premier principe (version enthalpique) au système isolé.

$$\Delta H_{\text{syst}} = Q = 0$$

On utilise l'additivité de l'enthalpie en négligeant la capacité thermique du calorimètre :

$$\Delta H_{\text{syst}} = 0 = \Delta H_1 + \Delta H_2 = C_1\,(T_{eq} - T_1) + C_2\,(T_{eq} - T_2)$$

Ainsi,

$$\boxed{T_{eq} = \frac{C_1T_1 + C_2T_2}{C_1 + C_2}}$$

2) On utilise le formulaire et l'additivité de l'entropie :

$$\boxed{\Delta S_{\text{syst}} = \Delta S_1 + \Delta S_2 = C_1\,\ln\left(\frac{T_{eq}}{T_1}\right) + C_2\,\ln\left(\frac{T_{eq}}{T_2}\right)}$$

3) Dans ce cas :

$$\boxed{T_{eq} = \frac{T_1 + T_2}{2}}$$

Et donc :

$$\Delta S_{\text{syst}} = C\,\ln\left(\frac{(T_1+T_2)^2}{4T_1T_2}\right) = C\,\ln\left(\frac{(T_1+T_2)^2\,/T_1^2}{4T_1T_2/T_1^2}\right) = C\,\ln\left(\frac{(1+x)^2}{4x}\right)$$

On peut remarquer que :

$$(1+x)^2 = (1-x)^2 + 4x \quad\Rightarrow\quad \boxed{\Delta S_{\text{syst}} = C\,\ln\left(1+\frac{(1-x)^2}{4x}\right) \geq 0}$$

Ce nombre est bien positif car il s'agit du ln d'un nombre > 1.

En effet, comme le système est isolé, l'entropie échangée avec l'extérieur est nulle, on en déduit que la variation d'entropie correspond en fait à l'entropie créée : $\Delta S = S_c$. Ce résultat était prévisible car les transferts thermiques entre les deux solides sont sources d'irréversibilité, sauf dans le cas où $T_1 = T_2$ (ie. $x = 1$).

Ex. n°9 • Variation d'entropie lors d'une congélation ★★☆ 9241

L'entropie étant une fonction d'état, on peut déterminer sa variation sur le chemin que l'on souhaite. On décrit la transformation comme les trois étapes suivantes :

(1) Refroidissement isobare des aliments jusqu'à la température de fusion.

(2) Solidification isobare.

(3) Refroidissement isobare des aliments congelés.

On assimile les aliments à des PCI. Déterminons les variations d'entropie et d'enthalpie massiques pour chaque étape.

$$\Delta s_1 = c_d \ln\left(\frac{T_{\text{fus}}}{T_e}\right) \qquad \Delta h_1 = c_d\,(T_{\text{fus}} - T_e)$$
$$\Delta s_2 = \frac{\Delta h_2}{T_{\text{fus}}} \qquad \Delta h_2 = -\ell_{\text{fus}}$$
$$\Delta s_3 = c_c \ln\left(\frac{T_i}{T_{\text{fus}}}\right) \qquad \Delta h_3 = c_c\,(T_i - T_{\text{fus}})$$

On en déduit la variation d'entropie totale :

$$\boxed{\Delta S = m\,(\Delta s_1 + \Delta s_2 + \Delta s_3) = -1{,}27\ \text{kJ}\cdot\text{K}^{-1}}$$

Ainsi que l'entropie échangée (transformations isobares donc $\Delta H = Q$) :

$$\boxed{S_e = \frac{Q}{T_i} = \frac{\Delta H}{T_i} = \frac{m\,(\Delta h_1 + \Delta h_2 + \Delta h_3)}{T_i} = -1{,}37\ \text{kJ}\cdot\text{K}^{-1}}$$

On en déduit l'entropie échangée :

$$\boxed{S_c = \Delta S - S_e = 0{,}10\ \text{kJ}\cdot\text{K}^{-1}}$$

Ex. n°10 • Cylindre séparé en deux compartiments ★★☆ 4390

1) Les quantités de matière sont nécessairement différentes dans chaque compartiment : $n_1 = 1$ mol et $n_2 = 3$ mol.

À l'équilibre thermodynamique, les températures T_f et pressions P_f sont égales dans les deux compartiments. De plus, par conservation du volume : $V_1 + V_2 = 2V_0$. Ainsi,

$$P_f V_1 = n_1 R T_f \quad \text{et} \quad P_f V_2 = n_2 R T_f \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{array}{l} V_2 = 3V_1 = 37{,}5\ \text{L} \\ V_1 = 12{,}5\ \text{L} \end{array}}$$

Le système composé des deux gaz et du piston est isolé. En effet, le récipient est rigide, donc $W = 0$ et les parois sont adiabatiques, donc $Q = 0$. On a donc :

$$\Delta U_{\text{syst}} = 0 = \Delta U_1 + \Delta U_2 + \Delta U_{\text{piston}}$$

Or, la capacité thermique du piston est négligeable. Donc :

$$0 = \frac{n_1 R}{\gamma - 1}(T_f - T_0) + \frac{n_2 R}{\gamma - 1}(T_f - T_0) \quad \Rightarrow \quad \boxed{T_f = T_0 = 300\ \text{K}}$$

On en déduit les pressions :

$$\boxed{P_f = 2\ \text{bar}}$$

2) On utilise le formulaire :

$$\Delta S_1 = C_{V,1}\left[\ln\left(\frac{P_f}{P_1}\right) + \gamma \ln\left(\frac{V_1}{V_0}\right)\right] = -n_1 R \ln(2)$$

De même :

$$\Delta S_2 = C_{V,2}\left[\ln\left(\frac{P_f}{P_2}\right) + \gamma \ln\left(\frac{V_2}{V_0}\right)\right] = -n_2 R \ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

Bilan :

$$\Delta S_{\text{syst}} = \Delta S_1 + \Delta S_2 = -n_2 R \ln\left(\frac{2}{3}\right) - n_1 R \ln(2) = 4{,}4\ \text{J}\cdot\text{K}^{-1}$$

Le système étant isolé, $S_e = 0$. On en déduit : $\boxed{S_c = \Delta S_{\text{syst}} > 0}$

Elle est bien strictement positive comme il se doit pour l'évolution irréversible d'un système isolé.

Ex. n°11 • Transformations couplées ★★⯪ 9164

1) On a : $n = \dfrac{P_0 V_0}{R T_0} = 40$ mmol

Équilibre mécanique : $P_{\text{A}} = \boxed{P_{\text{B}} = 2P_0 = 2\ \text{bar}}$

Le système B subit une **transformation adiabatique réversible** (car lente). On applique la loi de Laplace :

$$PV^\gamma = cte \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_{\text{B}} = V_0\left(\frac{P_0}{2P_0}\right)^{1/\gamma} = 6{,}1\ \text{L}}$$

Finalement,

$$\boxed{T_{\text{B}} = \frac{P_{\text{B}} V_{\text{B}}}{nR} = 366\ \text{K}}$$

2) Conservation du volume : $V_{\text{A}} + V_{\text{B}} = 2V_0$. On en déduit :

$$\boxed{V_{\text{A}} = 13{,}9\ \text{L}} \quad \text{et} \quad \boxed{T_{\text{A}} = \frac{P_{\text{A}} V_{\text{A}}}{nR} = 834\ \text{K}}$$

3) On applique le premier principe au gaz du compartiment B :

$$\Delta U_{\text{B}} = W_{\text{B}} = C_V\,(T_{\text{B}} - T_0) \quad \Rightarrow \quad \boxed{W_{\text{B}} = \frac{nR}{\gamma - 1}\,(T_{\text{B}} - T_0) = 550 \text{ J}}$$

À tout instant, $P_{\text{A}}(t) = P_{\text{B}}(t) = P$ et $V_{\text{A}}(t) + V_{\text{B}}(t) = 2V_0 \Rightarrow dV_{\text{A}} + dV_{\text{B}} = 0$. Ainsi,

$$W_{\text{B}} = -\int_{EI}^{EF} P\ dV_{\text{B}} = \int_{EI}^{EF} P\ dV_{\text{A}} = -W_{\text{A}}$$

On en déduit :

$$\boxed{W_{\text{A}} = -W_{\text{B}} = -550 \text{ J}}$$

4) On applique le premier principe à {gaz A + gaz B}. C'est un système isolé entouré par des parois calorifugées ($Q = 0$) et rigides ($W = 0$).

$$\Delta U_{syst} = RI^2\tau = \frac{nR}{\gamma - 1}\,(T_{\text{A}} - T_0) + \frac{nR}{\gamma - 1}\,(T_{\text{B}} - T_0)$$

Ainsi,

$$\boxed{\tau = \frac{nR\,(T_{\text{A}} + T_{\text{B}} - 2T_0)}{RI^2\,(\gamma - 1)} = 500 \text{ s}}$$

5) Le système B subit une transformation adiabatique ($S_{e,\text{B}} = 0$) réversible ($S_{c,\text{B}} = 0$). Ainsi : $\Delta S_{\text{B}} = 0$.

Le système A subit une transformation adiabatique ($S_{e,\text{A}} = 0$). Ainsi,

$$\boxed{\Delta S_{\text{A}} = S_{c,\text{A}} = \frac{nR}{\gamma - 1}\left[\ln\left(\frac{P_{\text{A}}}{P_0}\right) + \gamma\,\ln\left(\frac{V_{\text{A}}}{V_0}\right)\right] > 0}$$

Ex. n°12 • Approche de la réversibilité ★★★ 8821

1) Entropie échangée :

$$S_e = \frac{Q}{T_f} = \frac{\Delta H}{T_f} = \frac{C\,(T_f - T_i)}{T_f} = C\left(1 - \frac{T_i}{T_f}\right)$$

Variation d'entropie :

$$\Delta S = C\,\ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right)$$

On en déduit l'entropie créée :

$$\boxed{S_c = \Delta S - S_e = C\left(\ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right) + \frac{T_i}{T_f} - 1\right) > 0}$$

2) On adapte la formule précédente pour l'entropie créée à l'étape n :

$$\boxed{S_{c,n} = C\left(\ln\left(\frac{T_{n+1}}{T_n}\right) + \frac{T_n}{T_{n+1}} - 1\right) = C\left(\frac{1}{N}\,\ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right) + \left(\frac{T_i}{T_f}\right)^{1/N} - 1\right)}$$

Cette entropie ne dépend pas de n. Au bout des N étapes, on aura donc :

$$\boxed{S_c = N \times S_{c,n} = C\left(\ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right) + N\left(\frac{T_i}{T_f}\right)^{1/N} - N\right)}$$

3) On utilise le développement limité à l'ordre 2, pour $1/N \to 0$:

$$\left(\frac{T_i}{T_f}\right)^{1/N} = \exp\left(\frac{1}{N}\,\ln\left(\frac{T_i}{T_f}\right)\right) \simeq 1 + \left[\frac{1}{N}\,\ln\left(\frac{T_i}{T_f}\right)\right] + \left[\frac{1}{2N^2}\,\ln^2\left(\frac{T_i}{T_f}\right)\right]$$

On en déduit :

$$\boxed{S_c \simeq \frac{C}{2N}\,\ln^2\left(\frac{T_i}{T_f}\right) \to 0}$$

Qui tend vers 0 quand $N \to \infty$. La transformation peut donc être rendue réversible en utilisant une infinité de thermostats.

4) On a déjà montré que :

$$\boxed{S_c = \Delta S = nR\,\ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right) = nR\,\ln(2)}$$

5) Si on envisage une suite de détentes infinitésimales. On note :

$$V_n = V_0 + n\frac{V_0}{N} \quad \text{avec :} \quad n = 0\ \ldots\ N$$

La variation d'entropie à l'étape n sera :

$$\boxed{S_{c,n} = nR\,\ln\left(\frac{V_{n+1}}{V_n}\right)}$$

Au bout des N étapes, on aura donc :

$$\boxed{S_c = nR \sum_{n=0}^{N-1} \ln\left(\frac{V_{n+1}}{V_n}\right) = nR\, \ln\left(\frac{V_N}{V_0}\right) = nR\, \ln(2)}$$

Le résultat est le même. Cette transformation ne peut pas être rendue réversible.

Pour s'entraîner au DS

Ex. n°13 • Tube de Rüchardt ★★☆ 2935

1) On applique un PFD sur la bille à l'équilibre.

$$0 = mg + P_a S - P_e S \quad \Rightarrow \quad \boxed{P_e = P_a + \frac{mg}{S}}$$

2) La transformation est une compression adiabatique réversible d'un gaz parfait. On peu donc appliquer la loi de Laplace, entre l'état d'équilibre et un état quelconque.

$$P_e V_0^\gamma = P(z)\, V^\gamma(z) \quad \text{avec :} \quad V(z) = V_0 - Sz$$

Ainsi,

$$\boxed{P(z) = P_e \left(\frac{V_0}{V_0 - Sz}\right)^\gamma = P_e \left(1 - \frac{Sz}{V_0}\right)^{-\gamma}}$$

3) On applique le PFD hors équilibre :

$$m\ddot{z} = mg + P_a S - P(z)\, S = P_e S - P_e S \left(1 - \frac{Sz}{V_0}\right)^{-\gamma}$$

On en déduit :

$$\boxed{\ddot{z} = \frac{P_e S}{m}\left[1 - \left(1 - \frac{Sz}{V_0}\right)^{-\gamma}\right]}$$

4) On rappelle que :

$$(1+\varepsilon)^\alpha \simeq 1 + \alpha\varepsilon$$

On fait un développement limité au premier ordre de l'équation différentielle :

$$\ddot{z} \simeq \frac{P_e S}{m}\left[1 - \left(1 + \frac{\gamma S z}{V_0}\right)\right] \quad \Rightarrow \quad \boxed{\ddot{z} + \omega_0^2\, z = 0 \quad \text{avec :} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{\gamma P_e S^2}{m V_0}}}$$

On a bien une équation différentielle d'oscillateur harmonique, dont la solution est sinusoïdale.

5) On en déduit γ à l'aide de la mesure d'une période T d'oscillation.

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{\gamma P_e S^2}{m V_0}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\gamma = \frac{4\pi^2 m V_0}{P_e S^2 T^2}}$$